Conteúdos:

O desenvolvimento do conceito de número ao longo dos tempos.

Os números reais

Aperfeiçoar o cálculo em IR

Operações com potências

Notação Científica

Propriedades dos Radicais

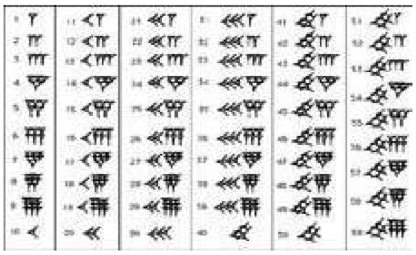
Evolução do conceito de número

Um pouco de História

A noção de número é tão antiga como o Homem. É difícil analisar os "caminhos percorridos" pela mente humana para alcançar um sistema de numeração que fosse cómodo de usar e que facilitasse o pensamento da pluralidade. Só algumas civilizações chegaram à criação de sistemas de numeração verdadeiramente eficientes, este processo está profundamente unido ao progresso matemático e cultural dos povos.

Das quatro grandes civilizações do mundo ocidental antigo, Babilónica, Egipcia, Grega e Romana, só duas mostraram uma criatividade matemática verdadeiramente notável: a Babilónica e a Grega.

Numeração Babilónica

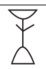


Os Babilónios possuíam uma organização administrativa muito complexa, as suas construções agrícolas e urbanas eram impressionantes. Tudo isto estimulou o desenvolvimento de um sistema de numeração de base 60 já consistente em 2100 a. C. Com este sistema, e pelo facto de utilizar os símbolos associados ao seu valor posicional, os sumérios foram capazes de realizar operações aritméticas complicadas.

O valor do símbolo dependia da sua posição no número, da mesma forma que para nós o 7 no 37 representa sete unidades e no 74 representa sete dezenas. Para os sumérios o número 7565 era $2 \times 60^2 + 6 \times 60 + 5$.

7565 na base 10 corresponde a 265 na base 60.

Numeração Egípcia

Símbolo Egípcio	Descrição	Nosso Número
	Bastão	1
	Calcanhar	10
	Rolo de corda	100
	Flor de lótus	1000
	Dedo apontando	10000
	Peixe	100000
	Homem	1000000

Na aritmética egípcia, muito mais rudimentar, a transição para uma unidade superior indicava-se, não pela posição dos algarismos, mas sim usando um novo símbolo **(ver quadro na coluna à esquerda).**

Permanece na nossa cultura um resíduo do sistema de numeração sumério, a nossa forma de contar o tempo e o carácter sexagésimal da nossa astronomia e trigonometria. Os hindus usavam o sistema de numeração decimal (base 10) sem a notação posicional. O sistema era formado pelos chamados numerais brãhmi, com sinais especiais para cada número. Estes símbolos remontam pelo menos à época do Rei Asóka (300 a. C.).

Atribui-se aos hindus a invenção do zero. No entanto, este também aparece noutros sistemas de numeração, tão ou mais antigos que o Hindu. Pensa-se que foram os Maias que fizeram um uso mais sistemático do zero, usando-se para indicar a ausência de qualquer unidade nas várias ordens do sistema vigesimal (de base 20).

O mais antigo símbolo para o zero parece ter sido usado pelos hindus: um ponto, aparece num manuscrito que remonta ao século III ou IV d.C. O símbolo hindu para o zero era usado para assinalar espaços vazios e chamava-se *sunya* (significa "*lacuna" "vazio*"). Entrou para o árabe como *sifr* ("*vago*") e depois para o latim como *zephirum*; de *zenero, zepiro* e *cifre* evoluiu para *cifra* e *zero* hoje em uso. Os números negativos aparecem pela primeira vez no livro chinês *Nove Capítulos* que data do período da dinastia Han (206 a.C. - 220 a.C.)

O maior desenvolvimento da matemática grega deu-se no período helénico, de 300 a.C. a 200 d.C. Por volta de 300 a.C. o centro da matemática mudou-se de Atenas para a cidade de Alexandria (no Egito)construída por Alexandre o Grande (358 - 323 a.C.). Alexandria permaneceu o centro da Matemática durante cerca de um milénio e foi onde trabalharam matemáticos, como por exemplo Euclides (c. 325 - 265 a.C.).

No início do século VI a.C., os filósofos de Mileto, entre eles Thales (c.625 a.C. 547 a. C.), começaram a tentar compreender os fenómenos da natureza sem recorrer a mitos e à religião. A utilização do raciocínio dedutivo deu origem à criação de uma matemática dedutiva formalmente organizada, bem diferente da matemática de caráter iminentemente prático, desenvolvida no Egito e na Mesopotâmia.

Os textos de maior parte dos matemáticos gregos não chegaram aos nossos dias na sua versão original, uma vez que eram escritos em papiro. Os rolos de papiro eram muito frágeis e com a utilização estragavam-se. Assim, apenas os trabalhos considerados importantes, como os *Elementos de Euclides*, e que foram copiados frequentemente, é que chegaram até aos nossos dias. Por isso, o que normalmente se designa de Matemática Grega, é o que mais tarde autores bizantinos e árabes traduziram e copiaram a partir das fontes gregas disponíveis na época.

A Pitágoras deve-se a descoberta dos números irracionais. Por meio de segmentos de reta incomensuráveis, descobriu que a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado de 1cm de lado, não se podia expressar por números, pois apenas se conheciam os que atualmente chamamos de racionais.

Até chegar ao desenvolvimento atual da ideia de número o homem precisou de muitos séculos de trabalhos.

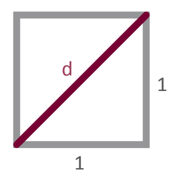
TAREFA 1

Observa como escreviam os egípcios, o número 322

Usando o sistema egípcio, é laborioso registar certas quantidades.

Escreve 999 no sistema egípcio e compara com a nossa maneira de escrevê-lo.

Se queremos calcular a diagonal de um quadrado de lado 1



O quadrado decompõe-se em dois triângulos retângulos. A diagonal do quadrado representa a hipotenusa dos triângulos.

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$d^2 = 1^2 + 1^2$ então

$d = \sqrt{2}$, um irracional !

Os pitagóricos surpreenderam-se muito com a existência deste tipo de números "tão estranhos" que contradiziam a sua doutrina, que preconizava a adoração do número como algo perfeito que governa o universo e tudo o que nele existe.

TAREFA 2

Determina o valor exato da diagonal de um quadrado de lado 15cm.

A IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$

Se $\sqrt{2}$ representasse um número racional então podia ser representado por uma fração irredutível, quociente de dois números naturais p e q, primos entre si, tais que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Temos então: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$

Considerando a última igualdade conclui-se que p^2 é par. Ora, se p^2 é par então p também o é, ou seja, pode escrever-se na forma p= 2k,com $k \in \mathbb{N}$.
Substituindo obtemos: $(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$
Ou seja, q^2 é par e q também o é. Ora se a partida tínhamos suposto que p e q eram números primos entre si e chegamos à conclusão que p e q são números pares, temos uma contradição, um absurdo. O absurdo surgiu de termos suposto que $\sqrt{2}$ era um número racional.

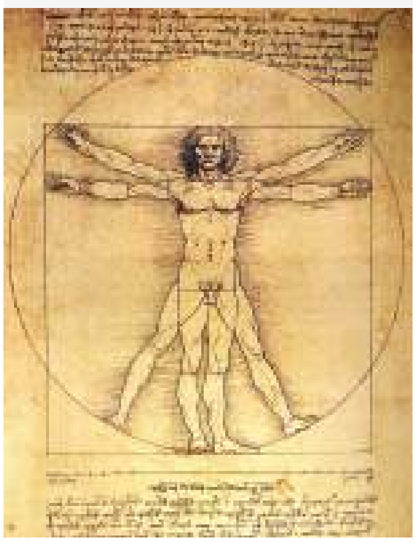
TAREFA 3

A primeira referência ao valor de π(pi) aparece na Bíblia, no Primeiro Livro dos Reis, 7, versículo 23:

"Fez mais o mar de fundição, de dez côvados, de uma borda até à outra borda, redondo ao redor, e de cinco côvados ao alto; e um cordão de trinta côvados o cingia, em redor."

Qual é o valor de π usado nesta afirmação?

Homem de Vitruvio
de Leonardo da Vinci

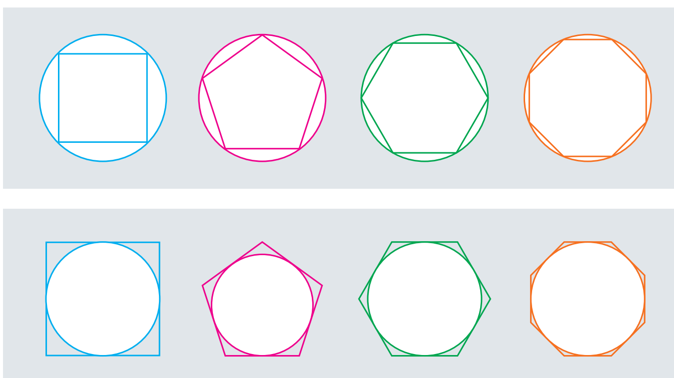


O número π

O número π é um número irracional e representa uma proporção numérica que tem origem na relação entre duas grandezas, o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro:

$$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Diâmetro}} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

Para determinar valores aproximados de π, Arquimedes, matemático grego da Antiguidade(287-212 a.C.) considerou uma circunferência de diâmetro um e uma sucessão de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência.



Quanto maior é o número de lados dos polígonos, inscrito e circunscrito à circunferência, melhores são as aproximações que se obtêm de π, uma por defeito e outra por excesso, respetivamente. Apesar dos cálculos desenvolvidos por Arquimedes serem muito trabalhosos, ele conseguiu considerar polígonos com 96 lados.

O número de Ouro

É um número irracional misterioso e enigmático. O número de ouro representava a " divina proporção", a "harmonia" e a "relação perfeita". Podemos observar a sua utilização em numerosas obras de arte assim como na natureza. O número de ouro é representado pela letra ϕ (fi maiúsculo), em homenagem a Fídias (Phideas), famoso escultor grego, por ter usado a "regra de ouro" em muitos dos seus trabalhos.

Nautilus marinho

Se quisermos dividir um segmento [AC] em duas partes, temos uma infinidade de maneiras de o fazer. Existe uma, no entanto, que parece ser mais agradável à vista, como se traduzisse uma operação harmoniosa para os nossos sentidos. Relativamente a esta divisão, o matemático alemão Zeizing formulou, em 1855, o seguinte princípio baseado em Euclides:

"Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo."

Por exemplo se $\overline{AC} = 7{,}535$cm e $\overline{AX} = 4{,}657$cm e $\overline{XC} = 2{,}878$cm

Então $\frac{\overline{AC}}{\overline{AX}} = 1{,}618$ $\frac{\overline{AX}}{\overline{XC}} = 1{,}618$

Ou seja, dado um segmento de reta [AC] um ponto X divide este segmento de uma forma mais harmoniosa se existir a proporção de ouro $\frac{\overline{AC}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XC}}$ (sendo [AC] o segmento maior).

O número de ouro é exatamente o valor da razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{AX}}$, a chamada razão de ouro ou Número de Ouro $\phi = \frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$

Aproximadamente ϕ = 1,618...

TAREFA 4

Mede o comprimento da falange, da falanginha e da falangeta do indicador de uma das tuas mãos.

Calcula as seguintes razões:

$\frac{\text{Falange}}{\text{Falangeta}}$ e $\frac{\text{Falangeta}}{\text{Falanginha}}$

Averigua se as razões obtidas se aproximam do número de ouro.

Números para contar

Contamos com os números naturais, por exemplo, os alunos de uma turma, os anos que passaram depois da independência. Mas os números naturais também servem para ordenar: Dizemos que a Terra é o 3º planeta segundo a sua distância ao sol ou também que a disciplina de geografia é lecionada ao quarto tempo da manhã.

Por vezes para contar precisamos de quantidades negativas: O ano -320 representa o ano 320 antes de Cristo. Um saldo no banco de -10 significa que temos uma dívida de 10.

O Sistema Solar é constituído pelo Sol e pelo conjunto dos corpos celestes que se encontram no seu campo gravítico, e que compreende os planetas. Os que atualmente compõem o sistema solar: Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Úrano, Neptuno

Até agosto de 2006, quando a União Astronómica Internacional alterou a definição oficial do termo planeta Plutão era considerado o nono planeta do Sistema Solar.

Plutão hoje em dia não é considerado um planeta embora esteja ainda no sistema solar.

Hoje é considerado um planeta anão, ou um planetoide, por ser muito pequeno.

O planeta mais próximo ao sol Mercúrio, está a 58 milhões de km. O mais longínquo, Plutão está a mais de 5,9 milhares de milhões de km.

O volume de Mercúrio é 6/100 do volume da Terra e Júpiter é 1316 vezes o do nosso.

Números para expressar medidas

Medir é relacionar duas magnitudes do mesmo tipo. Quando referimos que o volume do planeta Mercúrio é 6/100 do da Terra, estamos medindo o volume de Mercúrio tomando como unidade de medida o volume da Terra. O resultado de uma medição habitualmente não é um número inteiro pelo que para expressar medidas é necessário outro tipo de números diferentes dos inteiros, números que nos permitam usar bocados da unidade, esses são os racionais.

Números para calcular

Os números também servem para expressar quantidades e para realizar operações entre eles, de outra forma para encontrar valores novos a partir de alguns já conhecidos.

TAREFA 5

A soma de três números é 1275, os dois primeiros somam 7560 e o segundo é 3349. Encontra os três números

Conjuntos de números

A ordem pela qual são indicados, geralmente, os conjuntos não corresponde à sua ordem de descoberta na história, por exemplo, os números fracionários surgiram antes dos negativos e o zero, como número, só é utilizado nos sistemas de numeração a partir do século IX. Os conjuntos de números que já conhecemos são:

O conjunto dos Números Naturais e representa-se por

ℕ={1,2,3,4…,60,…100,…}

Os números naturais podem-se adicionar e multiplicar e o resultado dessas operações é sempre um número natural.

O conjunto dos Números inteiros relativos e representa-se por:

$\mathbb{Z}$= { …,-50,…,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,…,50,…}

Os números inteiros para alem de se poder adicionar e multiplicar também podem-se subtrair e obtemos sempre outro número inteiro.

Se ao conjunto dos números inteiros juntarmos os números fracionários obtemos o conjunto dos números racionais, que se representa por:

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup$ { números fracionários }

Os números racionais podem-se escrever como quociente de dois números inteiros, por exemplo $\frac{3}{2}; -\frac{5}{7}$.

Os números racionais podem adicionar-se, multiplicar-se, subtrair-se e dividir-se e o resultado é sempre um número racional. O único caso em que não é possível realizar a divisão é quando o divisor é zero.

TAREFA 6

a) Certo dia o termómetro de assinalava -8ºC as sete da manhã. Durante a manhã a temperatura subiu 13ºC e durante a tarde desceu o dobro do que tinha subido. Que temperatura marcava o termómetro ao por do sol?

b) De uma vela já arderam $\frac{5}{9}$. Se a vela tem 18cm de altura, quantos centímetros faltam por arder?

c) Quantas garrafas de 1,75 litros se podem encher com 80 litros de água?

d) De um deposito de 500 litros de agua, gastaram-se primeiro, $\frac{3}{5}$ do total e em seguida, $\frac{3}{4}$ do restante. Quantos litros de água sobraram?

Os números reais

Para além dos números racionais existem outros números, por exemplo $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ este número é uma dízima infinita não periódica, logo não é um racional.

A raiz quadrada de um número natural, quando não é inteira, é irracional, por isso são irracionais $\sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}$, etc.

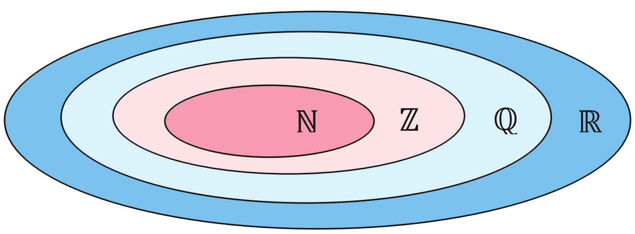
Também são irracionais os resultados de realizar operações entre racionais e irracionais, por exemplo: $1+\sqrt{2}$, entre estes podemos salientar o número de ouro ou proporção áurea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

O número π é o primeiro irracional que conheceste quando querias encontrar o perímetro da circunferência ou a área do círculo, 3,14165926535…, normalmente só usamos aproximações 3,14 ou 3,1416.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\textbf{números irracionais}\}$$

$$\textbf{Números Reais}\begin{cases}\textbf{Racionais} & \begin{cases}\textbf{Dízimas finitas}\\ \textbf{Dízimas infinitas periódicas}\end{cases}\\ \textbf{Irracionais} \longrightarrow & \textbf{Dízimas infinitas não periódicas}\end{cases}$$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



TAREFA 7

a) Calcula:

a.1) $\frac{1}{3}$ de 200

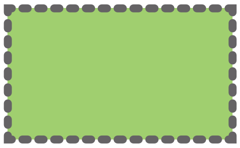
a.2) $\frac{2}{5}$ de 12

a.3) $\frac{8}{3}$ de 500

b) Três quartos de um metro de tecido custam 8,2$. Quanto custam 3m do mesmo tecido?

TAREFA 8

Temos 30m de rede para colocar à volta deste terreno. Quantos metros de rede sobram?



3 m

6,07 m

TAREFA 9

a) Usando os símbolos <; = ou >, completa de forma a obteres afirmações verdadeiras

a.1) $-\frac{1}{5} \cdots -3$

a.2) $0{,}02 \cdots \frac{2}{100}$

a.3) $-\frac{1}{3} \cdots \sqrt{3}$

b) Completa de forma a obter uma proposição verdadeira, usando os símbolos de pertence ou não pertence

b.1) $-1{,}3 \cdots \mathbb{Z}$

b.2) $\sqrt{3} \cdots \mathbb{R}$

b.3) $-\sqrt{2} \cdots \mathbb{Z}$

b.4) $-5 \cdots \mathbb{Q}$

c) Indica justificando o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

c.1) $-\frac{7}{9} \in \mathbb{Q}^+$

c.2) $\frac{\sqrt{4}}{3} \in \mathbb{Q}_0^+$

c.3) $\sqrt{3} \in \mathbb{R}^+$

c.4) $\frac{18}{5} \in \mathbb{Z}$

c.5) $0 \in \mathbb{N}$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES EM $\mathbb{R}$

Tanto a adição como a multiplicação são:

Comutativas:

Quaisquer que sejam os números reais a e b

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

Associativas:

Quaisquer que sejam os números reais a, b e c

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$
$$(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c} = \mathbf{a}.(\mathbf{b}.\mathbf{c})$$

A Multiplicação é distributiva em relação à adição:

Quaisquer que sejam os números reais a, b e c

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{c} = \mathbf{a}.\mathbf{c} + \mathbf{b}.\mathbf{c} \quad (\textbf{à direita})$$
$$\mathbf{a}.(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\mathbf{c} \quad (\textbf{à esquerda})$$

Existência de Elemento Neutro

Para qualquer número real a

$$\mathbf{a} \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

1 é o elemento neutro para a multiplicação.

Existência de elemento absorvente

Para qualquer número real a

$$\mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

0 é o elemento absorvente da multiplicação.

Existência de Elemento Inverso

Para qualquer número real a diferente de zero

$$\mathrm{a} \times \frac{1}{\mathrm{a}} = \frac{1}{\mathrm{a}} \times \mathrm{a} = 1 \qquad \text{sempre que } \mathrm{a} \neq 0$$

$$\frac{1}{\mathrm{a}} \text{ é o inverso de a sempre que } \mathrm{a} \neq 0$$

Exemplos

1. $\frac{2}{3}\left(\frac{6}{5} - 3\right) = \frac{12}{15} - \frac{6}{3} = \frac{12}{15} - \frac{30}{15} = -\frac{18}{15} = -\frac{6}{5}$
2. $2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) - 3\left(5 - \frac{5}{6}\right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 15 + \frac{15}{6} = \frac{4}{6} + \frac{8}{6} - \frac{90}{6} + \frac{15}{6} = -\frac{63}{6} = -\frac{21}{2}$
3. $\left(\frac{34}{67} \times 0\right) - (6 - 7) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \left(\frac{5}{2} - 1\right) \times \frac{7}{3} = \frac{3}{6} - \frac{8}{6} + \frac{35}{6} - \frac{14}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

Números e dízimas

Observa as seguintes frações:

$$\frac{2}{10} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{5}{6} \qquad \frac{7}{11}$$

Se efetuarmos a divisão:

$$\frac{2}{10} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots 3\ldots.$$

$$\frac{5}{6} = 0{,}833333\ldots 3\ldots$$

$$\frac{7}{11} = 0{,}636363\ldots 63\ldots$$

$\mathbf{\frac{2}{10}}$ é uma dízima finita, as outras três são dízimas infinitas, pois têm um número infinito de algarismos à direita da virgula. Em qualquer dos três casos, observamos que existe a repetição de algarismos

0,33333...3... → repetição do algarismo 3

0,83333....3... → repetição do algarismo 3

0,63636363...63... → repetição dos algarismos 6 e 3

Nestes casos, as dízimas dizem-se dízimas infinitas periódicas. Os algarismos que se repetem chamam-se período e escrevem-se entre parênteses.

$$\frac{1}{3} = 0,(3)$$

$$\frac{5}{6} = 0{,}8(3)$$

$$\frac{7}{11} = 0,(63)$$

As dízimas infinitas periódicas são sempre números racionais.

Como podemos escrever dízimas finitas periódicas em forma de fração?

Exemplo 1

Se queremos escrever 0,(21) sob a forma de fração, procedemos da seguinte forma:

Chamemos A = 0,21212121...

Multiplicamos A por 100 e temos 100 A = 21,212121...

Subtraímos 100 A de A

$$99\ \mathrm{A} = 21$$

$$\mathrm{A} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$$

Logo $0,(21) = \frac{7}{33}$

TAREFA 10

Calcula e simplifica:

a) $3 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)$

b) $1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$

c) $1 : \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times 0{,}2$

d) $2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5} : \frac{1}{2}\right)$

e) $-\frac{1}{5}\left(4 + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{15}$

TAREFA 11

Classifica as dízimas representadas por:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{7}{8}$

c) $\frac{4}{9}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{5}{7}$

f) $\sqrt{2}$

TAREFA 12

a) Escreva sob forma de fração

a.1) **1,(7)**

a.2) **2,3(5)**

a.3) **1,(36)**

b) Efetua os cálculos, apresentando o resultado em forma de fração

b.1) **2,(3)+3,(5)**

b.2) **10,(12)-5,(03)**

b.3) **2,(3):1,(2)**

Exemplo 2

Se queremos escrever 2,(5) sob forma de fração:

2,(5)=2+0,(5)   Consideramos A = 0,(5)

Multiplicamos A por 10 e subtraindo 10 A de A obtemos

10A – A = 5   logo $A = \frac{5}{9}$, podemos concluir que $0,(5) = \frac{5}{9}$

Como $2,(5) = 2 + 0,(5) = 2 + \frac{5}{9} = \frac{18}{9} + \frac{5}{9} = \frac{23}{9}$

Então temos que 2,5 = $\frac{23}{9}$

Exemplo 3

Para escrever 1,4(2) como uma fração

1,4(2) = 1,4+0,0(2)

Consideramos A= 0,0(2)

multiplicamos A por 100 e obtemos

100A = 2,2….. e subtraindo 100A-A , obtemos que

99A = 2,2 logo A = $\frac{22}{990} = \frac{11}{495}$ temos então

$$1{,}4(2) = 1{,}4 + \frac{11}{495} = \frac{14}{10} + \frac{11}{495} = \frac{64}{45}$$

Conclusão

Para transformar a dízima infinita não periódica multiplicaremos por 10, 100, 1000, de modo a obter-se o período à esquerda da vírgula.

Curiosidade

Hoje em dia para encontrar o valor aproximado de uma raiz quadrada usamos as máquinas de calcular. Como curiosidade vamos calcular o valor aproximado de algumas raízes.

Por exemplo calcular :

A raiz quadrada de 103681

$\sqrt{10,36,81}$	321	
9	3x2=6	
13,6	62x2=124	13:6=2
– 12 4	32x2=64	
0128,1	642X2=1284	
– 641	641X1=641	128:64=2
0640		

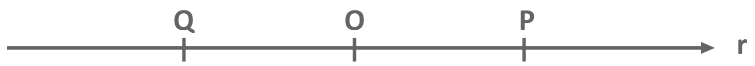
A raiz quadrada de 17 com aproximação de 0,1

$\sqrt{17{,}00}$	4,1
$-$ 16	2X4=8
10,0	81X1=81
$-$ 81	
19	

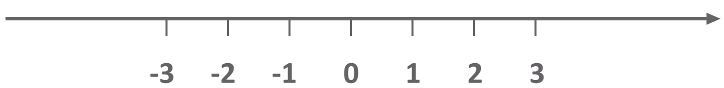
Reta Real

É possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais.

Consideramos uma reta r e sobre esta um ponto O, que designamos por origem, consideramos um ponto P à direita de O e um ponto Q à esquerda de O.



O ponto O divide a reta r em duas semirretas $\dot{O}P$ e $\dot{O}Q$. A semirreta $\dot{O}P$ convencionou-se chamar positiva e a outra negativa. Consideramos também uma unidade de comprimento sobre a reta.



Reta real

[Valor absoluto (ou módulo) de um número real x.]

A distância a que um ponto de abcissa x se encontra da origem representa o valor absoluto de x ou módulo de x que designamos por |x|.

Observa:

Ponto	distância do ponto à origem	
A de abcissa 1	$\overline{OA} = 1$	$\|1\| = 1$
B de abcissa $\sqrt{3}$	$\overline{OB} = \sqrt{3}$	$\|\sqrt{3}\| = \sqrt{3}$
C de abcissa -5	$\overline{OC} = 5$	$\|-5\| = 5$
D de abcissa -3$\sqrt{2}$	$\overline{OD} = 3\sqrt{2}$	$\|-3\sqrt{2}\| = 3\sqrt{2}$

Em Geral $|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

$$|x| \geq 0, \text{para qualquer número real } x$$

TAREFA 13

Representa na reta real os seguintes números e ordena-os por ordem decrescente

a) $-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; -1; 0{,}2; \sqrt{3}$

b) $\sqrt{2}; -2; 0; -\frac{1}{5}; \frac{3}{2}$

TAREFA 14

Representa na reta real

$L \rightsquigarrow \sqrt{2}$
$M \rightsquigarrow \sqrt{8}$
$N \rightsquigarrow \sqrt{18}$

Verifica que:

$\overline{OM} = 2\overline{OL}$ e $\overline{ON} = 3\overline{OL}$

O que se pode concluir?

Exemplos

Supondo que n é uma variável natural, escreve as seguintes expressões sem utilizar o símbolo de módulo:

(A) $|n+5| = n+5, \quad \text{visto que } n+5>0$

(B) $|-2n+1| = |-(2n-1)| = 2n-1, \quad \text{visto que } -2n+1<0$

(C) $|(-1)^n| = 1\,, \quad \text{visto que } (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{quando n é par} \\ -1 & \text{quando n é ímpar} \end{cases}$

(D) $\sqrt{n^2} = |n| = n\,, \quad \text{visto que } n>0 \quad , n \in \mathbb{N}$

Valores aproximados

Existem diferentes tipos de arredondamentos. Aqui vão-se lembrar duas regras. As regras de arredondamento aplicam-se aos algarismos decimais situados na posição seguinte ao número de algarismos decimais que se queira transformar.

Nota:

Nas operações com números reais, há duas formas de apresentar os resultados:

- O valor exato

- O valor aproximado

Regra 1

Se o algarismo decimal seguinte for menor que 5, o anterior não se modifica.

Exemplo

23,652. Arredondando a 2 algarismos decimais deveremos ter em atenção o terceiro decimal e obtemos 23,65

Se o algarismo decimal seguinte for maior ou igual que 5, o anterior incrementa-se em uma unidade.

Exemplo

23,658. Arredondando a 2 algarismos decimais deveremos ter em atenção o terceiro decimal e obtemos 23,66

TAREFA 15

Arredonda os seguintes números, com duas casas decimais, primeiro usando a regra 1 e seguidamente com a regra 2.

Compara os resultados

a) 4,657

b) 0,235

c) 23,445

d) 8,123

e) 0,215

Regra 2

Se o algarismo decimal seguinte for menor que 5, o anterior não se modifica.

Se o algarismo decimal seguinte for maior que 5, o anterior incrementa-se em uma unidade.

Se o algarismo decimal seguinte for igual a 5, o anterior incrementa-se em uma unidade caso ele seja impar, caso seja par basta conservar o algarismo.

Exemplo

12,355. Arredondando a 2 algarismos decimais deveremos ter em atenção o terceiro decimal: e obtemos 12,36

Exemplo

12,665. Arredondando a 2 algarismos decimais deveremos ter em atenção o terceiro decimal e obtemos 12,66.

Falemos agora dos irracionais

$\sqrt{\mathbf{2}}$ é um número irracional, uma dízima infinita não periódica.
Um valor aproximado para este número seria, por exemplo, 1, 414213562
Ou 1,4142 se consideramos 4 casas decimais
Ou 1,414 se consideramos 3 casas decimais
Ou 1,41 se consideramos 2 casas decimais

Em qualquer dos casos são valores aproximados por defeito
Um 1,42 seria um valor aproximado por excesso.

Suponhamos que pretendemos calcular um valor aproximado da expressão: $\sqrt{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$
Podemos fazer a aproximação com as casas decimais que quisermos, vamos fazer com três.

$\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots..$ $\qquad$ $\frac{1}{7} = 0{,}142 \ldots..$

Podemos afirmar que:

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

$$0{,}142 < \frac{1}{7} < 0{,}143$$

$$1{,}556 < \sqrt{2} + \frac{1}{7} < 1{,}558$$ (adicionando membro a membro)

Erro máximo cometido: 1,558-1,556=0,002

Dizemos que:
1,558 é um valor aproximado por excesso de $\sqrt{2} + \frac{1}{7}$ com erro inferior a 0,002
1,556 é um valor aproximado por defeito de $\sqrt{2} + \frac{1}{7}$ com erro inferior a 0,002.

TAREFA 16

Indica o erro cometido e os valores aproximados por defeito e por excesso com 4 casas decimais de:

a) $\sqrt{5} + 3$

b) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$

c) $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

d) $\pi + \sqrt{6}$

TAREFA 17

Calcula $11^2, 111^2$ e 1111^2, sem efetuar cálculos, indique o valor de 11111^2.

TAREFA 18

Calcula simplificando o resultado o mais possível.

a) $5^3 \times 3^3 \times 2^{-3}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2^{-3} \div \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2$

c) $\frac{8^{-4} \div (-2)^4 \times 4^2}{(3^0+3)^{-5}}$

d) $\left(3-\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{3}} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{7}{3}} \div 2^{\frac{10}{3}}$

e) $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}}{\left(1-\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}}$

f) $\frac{2^{-3} \times 3^{-5}}{2^7 \times 3^{-6}}$

POTÊNCIAS

Potência de a de expoente natural n é igual ao produto de n fatores iguais a a, ou seja

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n vezes}} \quad , a \in \mathbb{R}, n \geq 1$$

Propriedades

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $n, p \in \mathbb{N}$

Multiplicação de potências:

Com a mesma base $a^n \times a^p = a^{n+p}$

Com o mesmo expoente $a^n \times b^n = (a \times b)^n$

Divisão de potências:

Com a mesma base $a^n \div a^p = a^{n-p}$ para $a \neq 0$

Com o mesmo expoente $a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ para $b \neq 0$

Potência de uma Potência $(a^n)^p = a^{n \times p}$

As generalizações da definição de potência de expoente natural, às definições de potência de expoente inteiro e de expoente fracionário, são feitas de modo que as propriedades das potências se mantenham válidas.

Assim para uma potência de expoente nulo e base diferente de zero, temos:

$$a^0 = 1 \qquad \text{para } a \neq 0$$

Visto que se : $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$ e $a^n : a^n = \left(\frac{a}{a}\right)^n = 1^n = 1$ para $a \neq 0$, então $a^0 = 1$.

Para uma potência de expoente inteiro negativo e base diferente de zero, temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{para } a \neq 0$$

Observação

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{para } a \geq 0, n \in \mathbb{N}$$

Mais geral

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p} \qquad \text{para } a \geq 0, \; n, p \in \mathbb{N}$$

Exemplos

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$64^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4^{3\times\frac{1}{3}} = 4$$

$$\sqrt[7]{128^2} = 128^{\frac{2}{7}} = (2^7)^{\frac{2}{7}} = 2^2 = 4$$

$$1000^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{1000^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(10^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{10^{3\times\frac{1}{3}}} = \frac{1}{10}$$

TAREFA 19

Onde esta o erro na resolução seguinte? Porquê? Qual é a resolução correta?

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \div 3^{-2} \times 2^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \div 6^{-2} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \div \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{6}\right)^2 =$$

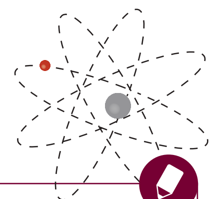
$$= \left(\frac{1}{3} \times 6\right)^2 = 2^2 = 4$$

Potências de base 10

As potencias de base 10 permitem-nos escrever de forma abreviada números ou “muito” grandes ou “muito” pequenos que surgem em muitos ramos da ciência e da técnica, tais como a Astronomia, a Física, a Química e a Economia, para estes números recorremos à Notação Científica.

Notação Científica é a representação de um número na forma:

$$a \times 10^n, \text{ em que } 1 \leq a < 10, n \in \mathbb{Z}$$



TAREFA 20

Indique a massa de :

a) 10 eletrões

b) 6×10^{23} eletrões(1 mole)

Exemplos

Massa da Terra	Em Notação científica
5 970 000 000 000 000 000 000 000 Kg	5.97×10^{22} Kg

Anos luz	Em Notação científica
9 460 800 000 000 Km	9.4608$\times 10^{12}$ Km

Massa de um eletrão	Em Notação científica
0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 91 g	9.1×10^{-27} g

Massa de um átomo de hidrogénio	Em Notação científica
0.000 000 000 000 000 000 000 001 66g	1.66×10^{-24} g

TAREFA 21

Escreve em notação científica os seguintes números:

a) 657,4

b) 2367,02

c) 0,01327

d) $(0{,}004)^2$

e) 4^{-3}

Raiz de índice n de um número real

Raiz índice n de um número real x é o número real y tal que $y^n = x$, ou seja:

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$$

TAREFA 22

Efetue as operações seguintes, apresentando o resultado em notação científica:

a) $(1{,}1 \times 10^{-2}) \times (3 \times 10^{10})$

b) $\dfrac{1{,}44\times10^{-3}}{4\times10^{6}}$

c) $(4{,}5 \times 10^{-15})(5 \times 10^{-12})$

TAREFA 23

Calcular, simplificando o mais possível o resultado:

a) $\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$

b) $\sqrt[3]{5} \times 5^{\frac{2}{3}}$

c) $(\sqrt{7})^2$

d) $(2\sqrt{7})^2$

e) $(\sqrt[3]{-2})^3$

f) $(3-\sqrt{3})^2$

TAREFA 24

Indica o conjugado de:

a) $3\sqrt{3}-4$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

c) $2-3\sqrt{7}$

TAREFA 25

Racionaliza o denominador das seguintes frações:

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-3}$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

Exemplo	Justificação	
$\sqrt{16} = 4$	$4^2 = 16$	
$\sqrt[3]{-8} = -2$	$(-2)^3 = -8$	
$\sqrt{-4} = x$	$x^2 = -4$	condição impossível

Observemos:

Se n é par: a expressão $\sqrt[n]{x}$ só tem significado se $x \in \mathbb{R}_0^+$
$\sqrt[n]{x^n} = x$ sempre que $x \in \mathbb{R}_0^+$

Se n é impar: a expressão $\sqrt[n]{x}$ tem significado se $x \in \mathbb{R}$
$\sqrt[n]{x^n} = x$ para $x \in \mathbb{R}$

Racionalização do denominador de uma fração

Consideramos a fração $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de denominador irracional, multiplicando ambos os termos da fração por $\sqrt{2}$ obtemos uma fração equivalente à dada:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A fração que se obtém $\frac{\sqrt{2}}{2}$ tem denominador racional e é equivalente a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de denominador irracional. Dizemos que o denominador foi racionalizado.

Racionalizar o denominador de uma fração consiste em transformar a fração noutra equivalente de modo que no denominador da nova fração não apareçam radicais. Esta operação nos permite realizar operações entre frações com mais facilidade observa:

Queremos adicionar: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sem racionalizar antes da operação:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$

Racionalizando antes da operação: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

Consideremos agora a fração $\frac{1}{\sqrt{2}-2}$, o denominador é irracional. Vamos agora multiplicar ambos os termos da fração por $\sqrt{2}+2$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-2} = \frac{1 \times (\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = \frac{\sqrt{2}+2}{(\sqrt{2})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{2}+2}{2-4} = \frac{\sqrt{2}+2}{-2} = -\frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

que já é uma fração de denominador racional.

A expressão $\sqrt{2}+2$ diz-se o conjugado de $\sqrt{2}-2$

NOTA

O conjugado da expressão a + b é a - b

O conjugado da expressão a - b é a + b

Operações com Radicais

Para $n, p \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha\sqrt[n]{x} \pm \beta\sqrt[n]{x} = (\alpha \pm \beta)\sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$$

$$\sqrt[n]{xa^n} = |a|\sqrt[n]{x}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x}$$

Exemplos

1. $\sqrt{3}+\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = (1-3)\sqrt{3} + \left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{5} = -2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{5}$
2. $\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$
3. $\left(\sqrt{3} \times \sqrt[3]{5}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \times \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = 3\sqrt[3]{5^2} = 3\sqrt[3]{25}$
4. $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

TAREFA 26

Indica, com denominador racional o inverso do número de ouro

TAREFA 27

Calcula, simplificando o resultado o mais possível:

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{10}$

b) $\sqrt[3]{18} \div \sqrt[3]{9} \times \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$

c) $3\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - 3\left(\sqrt[8]{2}\right)^4$

d) $\sqrt{\sqrt{36}} + \sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{216}$

e) $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{18}}{3\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$

f) $\sqrt{3\sqrt[3]{9}} \times \sqrt[3]{3}$

g) $\frac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}+\sqrt[6]{2}}{\sqrt[12]{4}}$

TAREFA 28

Calcula o número designado pela expressão $\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x\sqrt[3]{y}}}$ quando $x = 45$ e $y = 125$